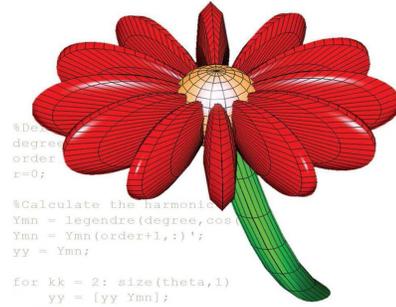


Prueba Final - Primer día



Junio 9 de 2012

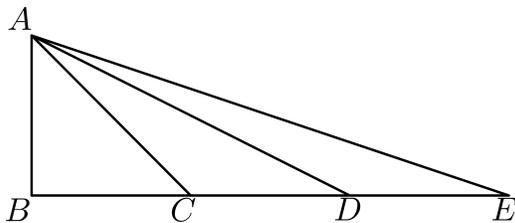
Nivel Avanzado

Grados 10 y 11

INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACIÓN DE LA PRUEBA

1. Asegúrese de que la prueba y el cuadernillo que le entregan corresponden a su nivel.
2. La prueba para el día de hoy consta de 4 preguntas de respuesta abierta. Al contestar una pregunta, debe justificar completamente su respuesta. Si no se presenta la justificación, sólo se otorgará la quinta parte del puntaje asignado al problema.
3. Para la realización de la prueba, sólo se necesita lápiz y borrador; por tanto, **NO** se permite el uso de ningún tipo de material adicional (computadores, celulares, calculadoras, libros, cuadernos, etc).
4. La prueba se calificará de acuerdo al puntaje indicado en cada problema.
5. El estudiante no puede hacer preguntas durante el desarrollo de la prueba.
6. Al terminar la prueba, el estudiante debe devolver al profesor encargado únicamente el CUADERNILLO DE RESPUESTAS (puede conservar este temario), sin olvidar marcar todas las hojas del cuadernillo con su nombre, colegio, municipio, grado, número de identificación y firma.
7. La prueba tiene una duración máxima de 3 horas.

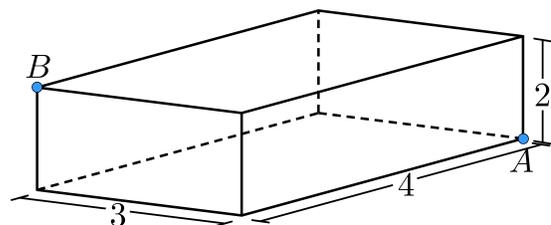
1. [14 puntos] Sea ABE un triángulo rectángulo como se ve en la figura. El cateto BE se divide en tres segmentos iguales, BC , CD y DE , todos iguales a AB . Determine la siguiente suma de ángulos: $\angle ACB + \angle ADB + \angle AEB$.



2. [8 puntos] Decimos que un número natural, escrito en base diez, es capicúa si leer sus cifras de izquierda a derecha es igual que leerlas de derecha a izquierda. Por ejemplo, el número 31599513 es capicúa. Decimos que un número es cuasicapicúa si es capicúa o si es posible permutar sus cifras para obtener un número capicúa, por ejemplo el 4789748 no

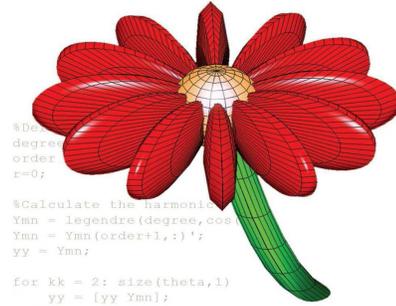
es capicúa pero es cuasicapicua, ya que pueden permutarse sus cifras para obtener el número 4789874, el cual es capicúa. Determine cuantos números de seis cifras, ninguna de ellas cero, son cuasicapicúas.

3. [12 puntos] En el vértice A de una caja de tamaño $2 \times 3 \times 4$ se encuentra una araña que quiere ir al vértice B , moviéndose sobre la superficie exterior de la caja. ¿Cuál es la distancia mínima que la araña debe recorrer?



4. [16 puntos] Demostrar que existen dos enteros positivos a y b diferentes, tales que $2^a - 2^b$ es un múltiplo de 100.

Prueba Final - Segundo día



Junio 10 de 2012

Nivel Avanzado

Grados 10 y 11

INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACIÓN DE LA PRUEBA

1. Asegúrese de que la prueba y el cuadernillo que le entregan corresponden a su nivel.
2. La prueba para el día de hoy consta de 3 preguntas de respuesta abierta. Al contestar una pregunta, debe justificar completamente su respuesta. Si no se presenta la justificación, sólo se otorgará la quinta parte del puntaje asignado al problema.
3. Para la realización de la prueba, sólo se necesita lápiz y borrador; por tanto, **NO** se permite el uso de ningún tipo de material adicional (computadores, celulares, calculadoras, libros, cuadernos, etc).
4. La prueba se calificará de acuerdo al puntaje indicado en cada problema.
5. El estudiante no puede hacer preguntas durante el desarrollo de la prueba.
6. Al terminar la prueba, el estudiante debe devolver al profesor encargado únicamente el CUADERNILLO DE RESPUESTAS (puede conservar este temario), sin olvidar marcar todas las hojas del cuadernillo con su nombre, colegio, municipio, grado, número de identificación y firma.
7. La prueba tiene una duración máxima de 2 horas y media.

1. [17 puntos] Se definen las operaciones $O1$ y $O2$ de la siguiente manera:

$O1$: se toma un número y se cambia de lugar la primera cifra con la última cifra.

$O2$: se toma un número, se le multiplica por tres y se le suma uno.

Por ejemplo al aplicar $O2$ a 3 se obtiene 10 y al aplicar $O1$ a 10 se obtiene 1, por lo tanto es posible obtener 1 a partir de 3 utilizando operaciones $O1$'s y $O2$'s. Determine si es posible obtener 2012 a partir de 1 utilizando operaciones $O1$'s y $O2$'s.

2. [14 puntos] Demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16}}$$

es igual a $\sqrt[3]{4} - 1$.

3. [19 puntos] ¿Cuántos triángulos $\triangle ABC$ existen tales que $AB = 9$, $\angle CAB = 60^\circ$ y todos sus lados son enteros?

